Quadratura Gaussiana

Laura Goulart

UESB

5 de Abril de 2016

Definição

As fórmulas da Quadratura Gaussiana fornecem resultados mais precisos e se baseiam em propriedades de polinômios ortogonais.
Definimos o seguinte produto interno:

$$< f, g >= \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

onde $\omega(x) \geq 0$ contínua em [a,b] chamada de função peso.

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

- $P_0(x) = 1$

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Em geral,

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = 1$. Os primeiros polinômios de Legendre são:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Em geral,

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x).$$

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

- $T_0(x) = 1$

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$

Em geral,

Polinômios de Tchebyshev

Os polinômios de Tchebyshev $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Os primeiros polinômios de Tchebyschev são:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$

Em geral,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

- $L_0(x) = 1$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

- $L_0(x) = 1$
- $L_1(x) = -x + 1$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

- $L_0(x) = 1$
- $L_1(x) = -x + 1$
- $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

- $L_0(x) = 1$
- $L_1(x) = -x + 1$
- $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Em geral,

Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Os primeiros polinômios de Laguerre são:

- $L_0(x) = 1$
- $L_1(x) = -x + 1$
- $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Em geral,

$$L_n(x) = (2n - x - 1)L_{n-1}(x) - (n-1)^2 L_{n-2}(x).$$

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

- $H_0(x) = 1$

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$

Em geral,

Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-\infty, \infty]$ em relação à função peso $\omega(x) = e^{x^2}$. Os primeiros polinômios de Hermite são:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$

Em geral,

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x).$$

Proposição 1

Seja $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, , phi_n(x)$ formam uma base para $P_n(\mathbb{R})$

Proposição 2

Sejam $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, $\phi_n(x)$ é ortogonal a qualquer polinômio de grau menor do que n.

Proposição 3

Sejam $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots$ uma sequência de polinômios ortogonais segundo o produto interno definido anteriormente. Então $\phi_n(x)$ possui n raízes reais distintas em [a,b].

Fórmulas da Quadratura Gaussiana

O método da Quadratura de Gauss resulta em duas vezes mais ponto de precisão que as fórmulas de Newton-Cotes, ie, tais fórmulas são exatas para polinômios de grau menor ou igual a $2n+1$. Além disso, neste método de integração numérica, temos a liberdade de escolher os pontos nos quais a função $f(x)$ é avaliada. Uma vantagem é que na avaliação da integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ não é necessário calcular a função nos pontos a e b.

Para isso, os pontos $x_0, \ldots, x_n$ são escolhidos de forma ótima, em lugar de torná-los equidistantes e vamos também escolher os polinômios de Legendre para o cálculo da Quadratura Gaussiana. Em alguns textos, essa quadratura é conhecida como Quadratura Gauss-Legendre. Existem ainda as quadraturas de Gauss-Tchebyshev, Gauss-Laguerre e Gauss-Hermite.

$$A_i = \int_a^b \omega(x) P_i(x),$$

nde $P_i(x)$ são os polinômios de Legendre sobre as raízes $x_0, \ldots, x_n$ de $\phi_{n+1}(x)$.

Segmento de reta

Inicialmente o intervalo de integração deve ser mudado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ para normalizar a solução e resultar em pontos padronizados. Pode-se conseguir isso através da troca de variáveis x para t abaixo:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)]$$

Veremos a seguir a construção da fórmula da Quadratura Gaussiana para n=1, ou seja, queremos determinar t_0, t_1, A_0, A_1 tais que $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1))$ seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 3.

Para a determinação destas incógnitas, independentes da função $F(t)$, necessitamos de quatro equações. Como essas incógnitas independem da função $F(t)$, escolhe-se as funções elementares $g_i(t) = t^i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- $\int_{1}^{-1} g_0(t)dt = A_0 g_0(t_0) + A_1 g_0(t_1)$

- $\displaystyle\int_{1}^{-1} g_0(t)dt = A_0 g_0(t_0) + A_1 g_0(t_1)$
- $\displaystyle\int_{1}^{-1} g_1(t)dt = A_0 g_1(t_0) + A_1 g_1(t_1)$

- $$\int_{1}^{-1} g_0(t)dt = A_0 g_0(t_0) + A_1 g_0(t_1)$$
- $$\int_{1}^{-1} g_1(t)dt = A_0 g_1(t_0) + A_1 g_1(t_1)$$
- $$\int_{1}^{-1} g_2(t)dt = A_0 g_2(t_0) + A_1 g_2(t_1)$$

- $\int_{1}^{-1} g_0(t)dt = A_0 g_0(t_0) + A_1 g_0(t_1)$
- $\int_{1}^{-1} g_1(t)dt = A_0 g_1(t_0) + A_1 g_1(t_1)$
- $\int_{1}^{-1} g_2(t)dt = A_0 g_2(t_0) + A_1 g_2(t_1)$
- $\int_{1}^{-1} g_3(t)dt = A_0 g_3(t_0) + A_1 g_3(t_1)$

Através de desenvolvimento semelhante ao apresentado acima, é possível encontrar as ponderações A_i e os pontos de avaliação t_i para a Quadratura Gaussiana de ordem 3, 4 e maior.

tabela

n	t_k	w_k	k
1	$-0,57735027$	$1,00000000$	0
	$0,57735027$	$1,00000000$	1
2	$-0,77459667$	$0,55555555$	0
	$0,00000000$	$0,88888888$	1
	$0,77459667$	$0,55555555$	2
3	$-0,86113631$	$0,34785485$	0
	$-0,33998104$	$0,65214515$	1
	$0,86113631$	$0,34785485$	2
	$0,33998104$	$0,65214515$	3
4	$-0,90617985$	$0,23692689$	0
	$-0,53846931$	$0,47862867$	1
	$0,00000000$	$0,56888889$	2
	$0,90617985$	$0,23692689$	3
	$0,53846931$	$0,47862867$	4

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{xdx}{x^2+4}$ usando a Quadratura Gaussiana com dois pontos.